

מתמטיקה למנהל עסקים 70001

פרק 3 - הפונקציה הממשית ומבוא לتورת הקבוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות	(לא ספר)
2. הפונקציה הליינרית	(לא ספר)
3. הפונקציה הריבועית	(לא ספר)
4. הפונקציה המעריכית	(לא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית	(לא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות	(לא ספר)
7. חזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה	(לא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה	1
9. הרכבת פונקציות	3
10. הפונקציה ההפוכה	6
11. פונקציה מפוצלת	10
12. תרגילים משלבים	11
13. מבוא לتورת הקבוצות	15

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

תשובות סופיות

(1) כל x .

(2) $x \neq \pm 2$

(3) כל x .

(4) $x \neq 0, 1, -1$

(5) $x \neq 2, -1$

(6) $x \geq 4$

(7) $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל x .

(9) $-1 < x < 1$

(10) $x < -2, x > 1$

(11) $x > 0, x \neq 1$

(12) כל x .

(13) $x > 0, x \neq 1$

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות המורכבות הבאות:
 $. h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

$f(g(x))$

$h(g(f(5)))$

$f(g(1))$

$h(h(x))$

$f(f(x))$

$h(f(x))$

2) נתון $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את $f(f(x))$

3) נתון $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את $f(g(x)) + g(f(x))$

4) נתון $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$

5) נתון $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$

6) נתון $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את $f(g(x)), g(f(x))$

7) נתונות הפונקציות

$. f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$ ו $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור הרכיבה $z(x) = g(f(x))$

(8) נתונות הפונקציות

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$$

$$\cdot g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

a. מצאו נוסחה עבור הרכבה $h(x) = f(g(x))$

b. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בודדות?

$n \leq -3$. 1

$n \geq 1$. 2

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

(9) נתון $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאו את $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x)))))}_{n \text{ Times}}$

תשובות סופיות

$$x. 1 \quad x - 8 . \text{ה} \quad \frac{4}{x-4} \cdot \pi \quad x^2 - 4 . \text{ג} . \quad \text{ב. 4} \quad -3 \text{ א. } (1)$$

3 (2)

69/13 (3)

-10 (4)

4 (5)

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 . \text{ב} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 . \text{א} \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חד"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חד"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חד"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$\text{. } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \quad (11) \text{ נתונה}$$

האם הפונקציה היא חד"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

12) עברו כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטעו והתמונה
וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} ; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ . א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} ; f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ . ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} ; f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ . ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4 ; f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ . ד.}$$

13) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f : (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad \text{ג.}$$

14) תהיינה שתי פונקציות $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$.

תהי $h(x) = g(f(x))$ הרכבה, המוגדרת על ידי
הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f ו- g חח"ע אז h חח"ע.
- ב. אם f ו- g חח"ע אז h על.
- ג. אם f ו- g על אז h על.
- ד. אם f ו- g על אז h חח"ע.
- ה. אם f חח"ע ו- g על אז h חח"ע.
- ו. אם f חח"ע ו- g על אז h על.
- ז. אם f על ו- g חח"ע אז h חח"ע.
- ח. אם f על ו- g חח"ע אז h על.

15) תהיינה שתי פונקציות $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$.

תהי $h(x) = g(f(x))$ הרכבה, המוגדרת על ידי
נתון כי h על.
הוכיחו או הפריכו:

- א. f חח"ע.
- ב. f על.
- ג. g חח"ע.
- ד. g על.

. $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$

. $h(x) = g(f(x))$ הרכבה, המוגדרת על ידי

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

- א. g על.
- ב. f על.
- ג. g חח"ע.
- ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

. y , $f^{-1}(x) = 3x + 1$ (1)

. $y \neq 1$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ (2)

$f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$ (3)

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$ (4)

(5) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2$ או $y \leq -2$

(6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$

(7) לא חח"ע. תמונה: $0 \leq y \leq 1$

(8) כן חח"ע. תמונה: $x > 0$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

(9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$

(10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$

(11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$

(12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: \mathbb{R} ; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $(-\infty, 0]$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $(-\infty, 0]$; לא על.

(13) א. תחום הגדרה וטווח: \mathbb{R} , תמונה: $(0, 1]$; לא על.

ב. תחום הגדרה \mathbb{R} , טווח ותמונה: $[0, 1]$; על.

ג. תחום הגדרה $(1, \infty)$, טווח $[0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

פונקציה מפוצלת

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת וشرطו את גраф הפונקציה :

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

- . a. חשבו $f(1), f(4), f(-4), f(0), f(7)$.
- . b. שרטטו את גראף הפונקציה.
- . c. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

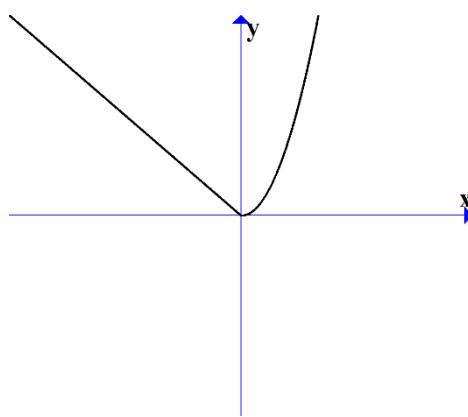
$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$(5) \text{ a. } f(1)=1, f(4)=16, f(-4)=4, f(0)=0, f(7)=\text{undefined}$$

ג. כללית.



תרגילים משלבים

שאלות

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

1) נתונה הפונקציה, וקבעו האם היא :

- א. עולה.
- ב. יורדת.
- ג. אי-זוגית.
- ד. זוגית.
- ה. חסומה.
- ו. לא חסומה.
- ז. חח"ע.
- ח. על \mathbb{R} .

הערה : ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

2) נתונה הפונקציה הבאים יש טענה.
קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

- א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.
- ב. הפונקציה על \mathbb{R} .
- ג. הפונקציה אי-זוגית.
- ד. הפונקציה הזוגית.
- ה. הפונקציה חח"ע.

הערה : ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x^3) - g(x)$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g : [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש, אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x))$$

אייזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

(5) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 0 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את h בקטע $[-2, 0]$.

ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2, 0]$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2, 0]$.

ד. קבעו האם $h : [-2, 0] \rightarrow [0, 4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה $h(x) = f(g(x))$ היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} .
 $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב :

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b) \Leftarrow a < b$

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} .
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו :

א. הפונקציה f עולה ממש וחו"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחו"ע.

9) מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על \mathbb{R} .

הערה : פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$

הערה : אין להשתמש בנזירות.

11) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$

א. מצאו את תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- 1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
- 2) אף טענה אינה נכונה.
- 3) טענה ב' נכונה.
- 4) טענה א' נכונה.
- 5) א. $h(x) = x^2$
 ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
 ד. הפונקציה לא על.
- 6) א. הפונקציה חסומה.
 ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי-זוגית.
 ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- 7) א. הפונקציה $(x)^z$ יורדת חלש.
 ב. הפונקציה $(x)^k$ יורדת חלש.
 ג. הפונקציה חסומה.
- 8) שאלת הוכחה.
- 9) $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$; תחום הגדרתה: כל x .
- 10) ראו באתר.
- 11) א. $-1 \leq x \leq 2$
 ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$
 ג. שאלת הוכחה.
 ד. $\frac{1}{2} < x \leq 2$ – עלייה, $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ – ירידת.

מבוא לתורת הקבוצות

סיכום כללי

הגדרות יסודיות

- גדרה חד-כיוונית \Rightarrow . $A \Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים, אז גם B מתקיים.
- גדרה דו-כיוונית \Leftrightarrow (אם ורק אם). $A \Leftrightarrow B$ פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או' \vee .
- הסימן 'וגם' \wedge .

קבוצה, איבר של קבוצה ושיעיות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שיעיות לקבוצה:
 - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשם $a \in A$.
 - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשם $a \notin A$.

שווין בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיקת אותן איברים.
- פורמלית שווין בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- \emptyset , כלומר $\{\} = \emptyset$.

קבוצה סופית ואיינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא איינסופית אם מספר האיברים בה איינסופי.

עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B , נסמן $A \subseteq B$.

תמיד מתקיימים :

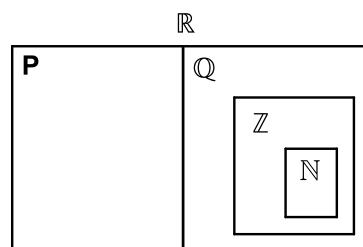
$$A \subseteq A \quad \bullet$$

$$\emptyset \subseteq A \quad \bullet$$

. $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ או $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ עבור שוויון קבוצות נדרוש

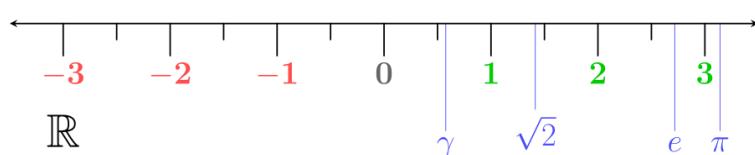
קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים : $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים הא-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט \mathbb{P}).
- קבוצת המספרים ממשיים : \mathbb{R} (כוללת את \mathbb{Q} ואת \mathbb{P}).



ציר המספרים

את קבוצת כל המספרים ממשיים ניתן לתאר על ידי הישר המשיש
שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים ממשיים :



קטיעים על ציר המספרים

תיאור מילולי	סימנון קבוצות	סימון קטיעים
הקטע הפתוח מ- a ל- b לא כולל נקודות הקצה	$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)
הקטע הסגור מ- a ל- b כולל נקודות קצה	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b	$\{x \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a	$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$
הקרן הפתוחה מ- a עד ∞ לא a	$\{x \mid a < x < \infty\}$	(a, ∞)
הקרן הסגורה מ- a עד ∞ כולל a	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	$[a, \infty)$
הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד b לא b	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$(-\infty, b)$
הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד b כולל b	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	$(-\infty, b]$

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תת-הקבוצות של A , נקראת קבוצת החזקה של A , ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cap B$.

תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \subseteq A \cup B$

הדיםטריבוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך :

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות A ו- B , המסומן $A - B$, הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B , כלומר $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

משלים של קבוצה

ההפרש $A - U$ מסומן ב- A^c או ב- ' A ונקרא **המשלים של A** , כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כלי זה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

דיאגרמת ווּן

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיות).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרוון איהשוין $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדרו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישום

בצורה: $\{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $\}$. $A = \{x \mid$

א. קבוצת המספרים השלמים החזוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו :

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$.

6) נתונה הקבוצה $. A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ מי מבין הטענות הבאות נכונה :

א. $\{2\} \in A$

ב. $2 \in A$

ג. $5 \in A$

ד. $\emptyset \in A$

ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$

ט. $\{2\} \subseteq A$

ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$

ז. $\emptyset \subseteq A$

יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$

ז. $\{2, 4\} \in A$

יד. $\{1, 4\} \in A$

יג. $\{2, 5\} \in A$

7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות :

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות :

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \not\subseteq D$ וגם $X \subseteq A$

ב. $X \not\subseteq C$ וגם $X \subseteq D$

ג. $X \not\subseteq A$ וגם $X \subseteq E$

9) הוכיחו : $. A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

10) נתונות הקבוצות הבאות :

$$\cdot A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $(A \cup B) \cap C$

ב. $A \cap B$

ג. $A \cup B$

ד. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

ה. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות :

$$\cdot A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א. $(A \cup B) \cap C$

ב. $A \cap B$

ג. $A \cup B$

ד. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

ה. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

12) נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את $(A - B) - C$

ב. חשבו את $A - (B - C)$

13) נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הציגו את כלל זה מORGAN

14) הוכחו את כלל זה מORGAN הראשון

15) מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- \mathbb{R} , של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16) הציגו באמצעות דיאגרמת ווֹן את הקבוצות הבאות :

ב. $A \cup B$

א. $A \cap B$

ד. $A \cap B^c$

ג. A^c

ו. $A \cup B^c$

ח. $A^c \cap B$

ט. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

ז. $A^c \cup B$

ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

17) ענו על השעיפים הבאים :

א. הוכחו כי $A \setminus B = A \cap B^c$

הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ווֹן.

ב. נסמן : $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

הוכחו כי $X = Y$

ג. נסמן : $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

הוכחו כי $Y = X$.

18) תהינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$

טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$

טענה ג': $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$

אייזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19) נתונה הקבוצה $A = \{\phi, 4, \{4\}\}$.

רשמו את $P(A)$

20) הוכחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

א. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq P(A)$

ב. לכל קבוצה A מתקיים $A \not\subseteq P(A)$

21) הוכחו כי : $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y , כך ש- $0 > (x+y)^2$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $\frac{y}{4} = xz$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $\forall x: x^2 + 4 > 0 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ ב. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \wedge x < -2$

$\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ ד. $\exists n \in \mathbb{N} : n^3 - n = 6k$ ג.

3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסופי איברים.

ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים.

ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$

ג. $D = \{1, 4, 9, 16\}$ ד. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

5) הקבוצות A , B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.

יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $A = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$ $B = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\}$

8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזו.

9) שאלת הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\}$$

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$\cdot (B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = (-2, 4)$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1)$$

$$(A \cup B) \cap C = (0, 4)$$

$$\cdot (B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1]$$

$$\cdot \{4, 5, 6\}$$

$$\emptyset$$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4]$$

$$B^c = [1, 4]$$

$$A^c = (-\infty, 1)$$

$$\cdot D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$$

16) ראו סרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענה ב.

$$\cdot P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\}$$

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.